Bibliographie.

Theodor Peters, Euklid Elemente Buch X, nach Heibergs Text übertragen, 118 S., Berlin, Pan-Verlagsgesellschaft m. b. H., 1936.

Die vorliegende Bearbeitung des X. Buches von EUKLID ist vollständig neu. Der Übersetzer vermied grundsätzlich jede zu weit gehende Symbolik und hat so die Form des ursprünglichen griechischen Textes treu bewahrt. Für formelhafte und häufig wiederkehrende Wendungen wird jedoch die Zeichensprache verwendet. Soweit die Inhalte sich decken, benutzt der Übersetzer auch moderne Begriffsbildungen. Eine algebraische Interpretation wird aber nicht gegeben, weil es nach Meinung des Übersetzers unmöglich ist, eine adäquate und formschöne algebraische Interpretation zu finden.

Das Buch enthält zum Schluß noch wertvolle Anmerkungen und zwar: A. Literatur; B. Bemerkungen zum Inhalt des X. Buches und zur vorliegenden Übertragung; C. Zusammenstellung der einleitenden Sätze; Übersicht über die zum Aufbau des Ganzen wichtigen notwendigen Schlußarten und Schlüsse; D. Vergleichende Übersicht teils auseinander folgender, teils einander entsprechender Sätze und Satzgruppen; E. Schlüsse aus Buch V; F. Anmerkungen zu den einzelnen Sätzen.

St. Lipka.

Rolf Nevanlinna. Eindeutige analytische Funktionen (Grundlehren der math Wissenschaften, Band XLVI), VIII + 353 S., Berlin, J. Springer, 1936.

Eine eindeutige analytische Funktion $w(z)$ vermittelt eine Abbildung eines schlichten Gebietes der z-Ebene auf ein schlichtes oder mehrfach überdecktes Gebiet der w-Ebene, die in jedem inneren Punkt, höchstens mit Ausnahme abzählbar vieler, die sich nur gegen den Rand häufen können, konform ist. Da dies auch umgekehrt gilt, ist es einleuchtend, daß gerade die Größen, die sich bei einer solchen Abbildung *invariant* verhalten, eine vorragende Rolle in der Theorie der analytischen Funktionen spielen. Diese Tatsache ist für den Verfasser des vorliegenden Werkes, den berühmten Vertreter der finnischen Schule, wegleitend gewesen. Schon im ersten Paragraphen begegnet der Leser den Invarianten der linearen Transformation, von denen aus Verfasser auf elementarem Wege zum Begriff des ***harmonischen Maßes*** eines Kreisbogens gelangt. Durch die Hauptsätze der konformen Abbildung und der Uniformisierung wird dieser Begriff auf beliebige, auch mehrfach zusammenhängende Gebiete und auf beliebige Randpunktmengen übertragen. Er ist für die ganze Darstellung von entscheidender Bedeutung. Zunächst stellt Verfasser ein allgemeines „Prinzip der Vergrößerung des harmonischen Masses" auf, das kurz besagt, daß durch eine eindeutige, aber mehrwertige Abbildung das harmonische Maß sich vergrößert. Dieses Prinzip wird an die Spitze einer Reihe wohlbekannter Sätze aus der Funktionentheorie gestellt, deren innerer Zusammenhang auf diese Weise dargelegt wird, ein Vorzug, der völlig den Umstand aufwägt, daß einzelne von diesen Sätzen durch spezielle Methoden einfacher erhalten werden könnten. Als Beispiele seien der Zweikonstantensatz und der Grenzwertssatz von LINDELÖF erwähnt. In demselben Sinne wird auch das Prinzip von LINDELÖF gedeutet, das Verfasser durch Anwendung einer nichteuklidischen Maßbestimmung in ein sogenanntes „Prinzip vom hyperbolischen Maß" überträgt. Als einfachster Fall dieses Prinzips ist das Schwarzsche Lemma zu erwähnen, weitere Folgerungen sind die Sätze von LANDAU und SCHOTTKY. Die harmonischen bzw. hyperbolischen Maße sind im allgemeinen nicht elementar durch die euklidischen Bestimmungsstücke (Länge, Winkel, usw.) ausdrückbar, es ist daher eine wichtige Aufgabe wenigstens Schranken anzugeben, den die Maßzahlen des einen Systems bei gegebenen Maßzahlen des anderen unterliegen müssen. Um das harmonische Maß abzuschätzen, macht Verfasser insbesondere von der Carlemanschen Methode der Gebietserweiterung Gebrauch, die in enger Beziehung zu der in der Potentialtheorie wohlbekannten Ausfegungsmethode steht. Dieselbe Methode wird auch zum Beweis der Verzerrungssätze von KOEBE und AHLFORS angewendet. Über das Problem von CARLEMAN-MILLOUX und die Methoden von NEVANLINNA und BEURLING zur Lösung desselben wird ausführlich berichtet. Ein besonderes Interesse verdienen die Punktmengen vom harmonischen Maß Null bzw. die von der Kapazität Null, oder wie Verfasser sagt, vom ***absoluten*** harmonischen Maß Null. Verfasser versucht auch diese Punktmengen durch die Hausdorffsche Metrik zu charakterisieren; dieses Problem wird für die linearen Mengen vom Cantorschen Typus vollständig gelöst. Als Beispiel für die Anwendung der harmonischen Nullmengen mag das erweiterte Maximumsprinzip von PHRAGMÉN-LINDELÖF genannt werden.

Die zweite Hälfte des Buches von NEVANLINNA ist der Theorie der meromorphen Funktionen und der Wertverteilungslehre gewidmet. Mit dieser Theorie hat sich ja Verfasser in seiner früheren Arbeit in Collection Borel, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, 1929) eingehend beschäftigt, das vorliegende Werk setzt aber jene nicht voraus, auch ist die Darstellung in mehreren Punkten vereinfacht und durch neue Resultate der Forschung vervollständigt worden. Die potentialtheoretischen Methoden und Maßbestimmungen kommen auch hier häufig zur Anwendung; wir erwähnen z. B. den Satz über die Randwerte einer beschränktartigen Funktion und den Ahlfors-Frostmanschen Satz über die defekten Werte. Es ist dem Verfasser gelungen, die relativ schwer zugänglichen Sätze dieser Theorie in übersichtlicher Form darzustellen, und das Lesen wird oft durch heuristische Betrachtungen erleichtert. Dies gilt z. B. vom zweiten Hauptsatz, für welchen Verfasser zwei Beweise gibt, von denen einer (der F. Nevanlinnasche) auf einer nichteuklidischen Maßbestimmung beruht. In den letzten Kapiteln kehrt Verfasser gewissermassen die Probleme um, er geht von einer gegebenen, einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche aus und sucht aus ihrer *Verzweigtheit* Schlüsse betreffs der Abbildungsfunktion zu ziehen. Diese Funktion bildet die Fläche auf ein schlichtes Gebiet ab, das — von leicht angebbaren Fällen abgesehen — entweder die punktierte Ebene (parabolischer Fall) oder der Einheitskreis (hyperbolischer Fall) ist. Das Problem der Trennung dieser beiden Fälle (das Typusproblem) wird eingehend behandelt. Die wohlgeschriebene und inhaltsreiche Arbeit schließt mit der Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen, die besonders die topologische Seite der Wertverteilungslehre hervorhebt. Es sei bemerkt, daß AHLFORS seine Untersuchungen später durch differentialgeometrische Methoden weiter verfolgt hat *(Acta Societatis Scientiarum Fennicae,* 1937), so daß man jetzt den wesentlichen Inhalt des zweiten Hauptsatzes in der Nevanlinnaschen Theorie aus dem klassischen Satz von GAUSS-BONNET erhalten kann.

Otto Frostman.

B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, erster Teil (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XXXIII), zweite verbesserte Auflage, X + 272 S., Berlin, J. Springer, 1937.

Mit der Neubearbeitung dieses ersten Bandes ist es dem Verfasser gelungen, das Buch wieder ganz auf die Höhe der Zeit zu bringen. Von den zahlreichen kleineren und größeren Umordnungen und Ergänzungen, die in dieser neuen Auflage gegenüber der ersten vorgenommen wurden, erwähnen wir, daß die Eulersche Resultantentheorie, sowie die Theorie der linearen Gleichungen aus dem zweiten Bande in den ersten übernommen sind, daß ein Paragraph über Partialbruchzerlegung hinzugefügt ist, daß die Lehre der Differentiation und die Interpolationsrechnung weiter ausgebaut sind, daß die Lehre der Faktorzerlegung elementar begründet wird, usw. Mit diesen Änderungen ist es gelungen, aus dem ersten Bande ein für Anfänger brauchbares Elementarbuch der Algebra (mit der Ausnahme der Determinantentheorie) zu machen. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Auflagen besteht aber darin, daß jetzt die Grundlagen der Bewertungstheorie ausführlicher behandelt werden, und, daß die Ausführungen über geordnete und wohlgeordnete Mengen, sowie diejenigen Teile der Körpertheorie, die auf dem Auswahlpostulat und dem Wohlordnungssatz beruhten, wegfallen. Der Aufbau der Körpertheorie ist so geändert, daß er dem „finiten" Standpunkt besser entspricht.

Béla v. Sz. Nagy.

Tibor Radó, Subharmonic Functions (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, fünfter Band, Heft 1), V + 56 S., Berlin, J. Springer, 1937.

Subharmonic functions are functions of two or more variables, continuous or upper semi-continuous, related to the harmonic functions in a similar fashion as convex functions are to the linear ones. The idea of such functions seems to have appeared first in connection with the sweeping-out method of POINCARÉ. Later on, the same idea has played also an important part in investigations of HARTOGS, PERRON, F. and R. NEVANLINNA, myself, and others on Potential Theory and Theory of Functions. Some 15 years ago, I have started to develop a systematic theory, a first outline of which is to be found in the second volume of these *Acta*. Among the many mathematicians who contributed to our theory, a prominent part is due to the author of the above report, Professor RADÓ, of Ohio State University, formerly at the University of Szeged. He was the first to apply a smoothing process, by way of integral means, to subharmonic functions of a more or less general type, so as to pass to approximating functions of a more particular type, to be dealt with by the classical methods of Potential Theory. Later on, in joint work with BECKENBACH, they established the relations linking subharmonic functions with minimal surfaces and surfaces of negative curvature. May I mention also his paper on harmonic majorants, in the current volume of our *Acta*. As to his present report, all I have to say is that it represents much more than a report; in fact, it is an up to date treatise, concise but nevertheless with many details, to be read by everyone who wishes to penetrate into our theory.

F. Riesz.

Stanislaw Saks, Theory of Integral, 2nd revised edition (Monografje Matematyczne, Tom VII), English by L. C. YOUNG, with two additional notes by STEFAN BANACH, VII + 347 pages, Warszawa—Lwów, 1937.

This english edition of SAKS' excellent monography differs in many respects from the french one. The material is considerably augmented by the insertion of many results atteined in these last years. Also the arrangement of the chapters and paragraphs is different from that of the french edition. The present edition starts with two chapters on integrals in abstract spaces (integral of RADON-NICODYM and that of CARATHÉODORY). A chapter follows on functions of bounded variation and on the LEBESGUE-STIELTJES integral. A chapter deals with the derivation of additive functions of a set (containing a large amount of new material, particularly the theorems of WARD). Then there follow chapters on the area of a surface $z = F(x, y)$, on major and minor functions (including PERRON and PERRON-STIELTJES integrals), on functions of generalised bounded variation, on DENJOY integrals and on derivatives of functions of one or two variables (containing some general results on the contingent of sets in the plane and in the space).

Two notes of BANACH are added, one presenting the theory of HAAR's measure, another the theory of the DANIELL integral, both in a slightly modified form.

Béla de Sz. Nagy.

Paul Luckey, Nomographie, praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, 59/60), dritte verbesserte Auflage, 107 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

Neuauflage der bekannten praktischen Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit erweitertem Schriftenverzeichnis. Sie kann infolge ihres durchwegs elementaren Charakters, mit ihren vielen durchgeführten Beispielen, 57 Abbildungen und gezeichneten Rechentafeln noch immer als beste Einführung in die, dem Ingenieur unentbehrlichen Nomographie empfohlen werden.

T. v. Stachó.

Eberhard Hopf, Ergodentheorie (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, fünfter Band, Heft 2), V + 83 S., Berlin, J. Springer, 1937.

Die Theorie vom Verlauf der Bewegungen mechanischer Systeme, d. h. der Lösungen von Systemen von Differentialgleichungen, allgemeiner der „Stromlinien" stationärer „Strömungen" im großen, hat innerhalb der letzten zehn Jahre durch das Eindringen maßtheoretischer Gesichtspunkte eine Reihe neuer Impulse erfahren. Wir begrüßen diese erste systematische Darstellung der neuen Ergebnisse, die man in erster Reihe G. D. BIRKHOFF, CARLEMAN, KOOPMAN, VON NEUMANN und dem Verfasser verdankt.

Das erste Kapitel stellt die notwendigsten Hilfsmittel aus der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie zusammen. Maßtheoretische Gesichtspunkte nehmen in der ganzen Darstellung den Vorrang vor den topologischen ein, da, wie der Verfasser betont, Ergodentheorie Statistik ist und Statistik Maßtheorie. Das zweite Kapitel enthält eine sehr schöne Darstellung der Hilfsmittel aus der Spektralanalyse der Funktionen und der unitären Operatorenscharen des Hilbertschen Raumes.

Ein Kapitel behandelt die Statistik bei Abbildungen und Strömungen. Ist $P \to P_t$ eine maßtreue Strömung im Raume Ω (die in gewissem Sinne meßbar von t abhängt), so besagt der statistische Ergodensatz, daß es zu jeder Funktion $f(P) \in L^2(\Omega)$ eine invariante Funktion $f^*(P) \in L^2(\Omega)$ (d. h.

$f^*(P_t) = f^*(P)$ fast überall) gibt, so daß

$$\lim_{b-a\to\infty} \int_{\Omega} \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(P_t)\,dt - f^*(P) \right|^2 dm = 0.$$

Bei endlichem $m(\Omega)$ heißt die Strömung ergodisch, wenn jede invariante Funktion fast überall konstant ist. Es werden interessante Beispiele ausgeführt. Dann werden Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine Strömung vom Mischungstypus sei, d. h., daß im Laufe der Zeit vollständige Vermischung im Phasenraum eintritt.

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der „individuellen Ergodentheorie", deren Grundlage der Satz von BIRKHOFF bildet. In verallgemeinerter Form lautet dieser Satz folgendermaßen. Ist $P \to P_t$ eine maßtreue Strömung in Ω und enthält Ω keine wandernde Menge, gehören ferner $f(P)$ und $g(P)$ zu $L(\Omega)$, $g(P) > 0$, so existiert fast überall in Ω das Zeitmittel von $f(P)$ längs der Stromlinien, d. h.

$$\lim_{T\to\infty} \left(\int_0^T f(P_t)\,dt \Big/ \int_0^T g(P_t)\,dt \right).$$

Eine Menge A positiven Maßes heißt dabei wandernd, wenn für ein t $m(A_t \, . \, A) = 0$ ist. Ein analoger Satz gilt für die Potenzen einer einzigen maßtreuen Abbildung.

Es folgen dann Anwendungen auf das Gesetz der großen Zahlen, der Wienersche Satz über das Spektrum der „random functions" und ein Beispiel für eine Abbildung vom Mischungstypus bei unendlichem $m(\Omega)$.

Das letzte Kapitel ist eine Wiedergabe der Untersuchungen des Verfassers über die geodätischen Strömmungen auf vollständigen Flächen konstanter negativer Krümmung und endlicher Oberfläche. Das Hauptergebnis besteht darin, daß jede solche Strömung ergodisch ist.

Béla v. Sz. Nagy.

Hans Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, erster Band (Hamburger Math. Einzelschriften, 21. Heft), VI + 151 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

Die großen Fortschritte, die in den letzten Zeiten in allen Gebieten der abstrakten Algebra erzielt wurden, haben das Erscheinen auch eines die neuesten Resultate und Gesichtspunkte darstellenden Lehrbuches der Gruppentheorie wohl berechtigt. Das vorliegende Buch entspricht ausgezeichnet dieser Aufgabe. Eine Reihe älterer Sätze erhalten hier vereinfachte Beweise und zahlreiche neuere Resultate finden hier ihre erste lehrbuchartige Zusammenfassung. Glücklich gewählte Aufgaben steigern noch den Wert des Buches.

Kapitel I erklärt die Grundbegriffe der Gruppentheorie und illustriert sie am Beispiele der endlichen Drehgruppen. Kapitel II betrachtet Gruppen mit Operatoren, die Homomorphie- und Isomorphiesätze, den Jordan-Hölder-Schreierschen Satz, die Darstellung einer Gruppe durch Permutationen, Kommutatorgruppen und -formen, sowie die mit der Gruppentheorie in Verbindung stehenden Begriffsbildungen in der Algebra. Kapitel III untersucht die direkten Produkte und die Struktur Abelscher Gruppen und stellt die Schreiersche Erweiterungstheorie und einen Artinschen Satz über Zerfällungsgruppen dar. Kapitel IV betrachtet p-Sylowgruppen und p-Gruppen (letzte nach einer Arbeit von P. HALL). Kapitel V beschäftigt sich endlich mit den monomialen Darstellungen, mit der Verlagerung in eine Untergruppe (nach ARTIN), sowie mit einer Reihe interessanter Sätze von FROBENIUS, BURNSIDE, GRÜN, IYANAGA und vom Verfasser.

Béla v. Sz. Nagy.

C. Boehm und E. Rose, Beiträge und Deckungsrücklagen in der Lebensversicherung (Versicherungsmathematische Aufgabensammlung, herausgegeben vom Deutschen Aktuarverein, Heft 1), XI + 75 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

C. Boehm und P. Lorenz, Umwandlung von Lebensversicherungen (Versicherungsmathematische Aufgabensammlung, herausgegeben vom Deutschen Aktuarverein, Heft 2), in Zusammenarbeit mit J. STANISZEWSKI, XIV + 52 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

In dieser Aufgabensammlung sind die mathematischen Fragen der Praxis der Lebensversicherung behandelt, und zwar in weitgehender Berücksichtigung der täglichen Erfordernisse des Versicherungstechnikers. Zweck und Verwendung der beiden Hefte wird durch die einleitenden Worte des ersten Heftes beleuchtet: „Der Praktiker wird aus den Aufgaben die allgemeinen Grundlagen der Versicherungsmathematik erarbeiten können, der Theoretiker die für die Praxis notwendigen Besonderheiten.“ Aus diesem Gesichtspunkte, sowie als Sammlung versicherungsmathematischer Aufgaben, füllt das Werk eine Lücke aus.

Im ersten Heft werden in 75 Aufgaben Versicherungsangebote, Gesamtleistung des Versicherungsnehmers, Nettoleistung des Versicherers, Berechnung der ausreichenden Prämie, Berechnung der Nettodeckungsrücklage, die gezillmerte Deckungsrücklage und endlich verschiedene wichtige Versicherungsformen behandelt.

Das zweite Heft enthält 42 Aufgaben, welche sich mit Änderungen der Versicherungssumme, der Beitragszahlungsweise, der Versicherungsdauer, der Versicherungsform, der Währung oder der Zusatzversicherungen beschäftigen, ferner mit Wiederbelebungen, Tilgung eines Darlehens oder einer Vorauszahlung und zum Schlusse mit Umwandlungsfragen für Rentenversicherungen.

In beiden Heften wurden für die Sterblichkeit die Aggregattafeln des Deutschen Reichs, Männer 1924/26, und der Zinsfuß $3^1/_2\%$ zugrunde gelegt.

Stephan Vincze.

Wilhelm Blaschke, Über eine geometrische Frage von Euklid bis heute, nach Vorträgen in Leiden, Amsterdam und Groningen im Januar 1938 (Hamburger math. Einzelschriften, 23. Heft), 20 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1938.

Ausgehend von der Frage der Starrheit eines Vielfaches, wird die entsprechende — allgemeinere — Frage bei Eiflächen behandelt, die zuerst von H. WEYL aufgeworfen wurde. Es handelt sich dabei um die beiden folgenden Sätze: Existenz einer Eifläche zu vorgeschriebenem positiv gekrümmtem Bogenelement; Eindeutigkeit einer solchen Fläche. Der Verfasser gibt einen neuen Beweis des Eindeutigkeitssatzes der vor dem von COHN-VOSSEN den Vorzug hat, ohne Regularitätsannahmen über die Eifläche auszukommen. Dann wird der vom Verfasser und HERGLOTZ herrührende Beweisansatz des Eindeutigkeitssatzes besprochen. Sein Grundgedanke ist der folgende: Man verwirkliche die Fläche zunächst in einem RIEMANN-Raum. Durch eine geeignete Minimumforderung gehe man von diesem Raum sodann zum Raum Euklids über. Damit ist die Frage auf Lösung eines Variationsproblems zurückgeführt.

Es darf angenommen werden, daß diese Schrift, die auf eine reiche Literatur Bezug nimmt, ein guter Fingerzeig zur Lösung des schwierigen Problems sein wird.

O. Varga.